# Modelos Matemáticos I Examen IV


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Modelos Matemáticos I Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Roxana Acedo Parra

Granada, 2026

**Asignatura** Modelos Matemáticos I.

**Curso Académico** 2025-26.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** María José Cáceres Granados.

**Descripción** Prueba 1. Temas 0 y 1.

**Fecha** 7 de abril de 2026.

**Duración** 105 minutos.

**Ejercicio 1.** Un equipo de farmacología trabaja con un modelo matemático propuesto por Ana, la matemática del grupo, para determinar la eficacia de un cierto medicamento frente a una enfermedad bacteriana. Ana les ha dicho que:

- Su modelo se basa en una ecuación en diferencias de la forma $p_{n+1} = f(p_n)$, con $f$ una función lo regular que haga falta. Sin entrar en detalles, porque ella es la única que sabe matemáticas.

- Si la población bacteriana, sujeta a la influencia del medicamento que están estudiando, se rige por este modelo, su tamaño en el día de estudio $n$ viene dado por
$$p_n = \frac{1}{a+bn}, \quad a > 0, b > 0,$$
medido en miles.

1. *(1 punto)* ¿Puede ser el modelo planteado una ecuación lineal de la forma $p_{n+1} = Ap_n + B_n$? Razona tu respuesta.
2. *(1 punto)* Determina el tamaño de la población en función de su tamaño inicial.
3. *(1 punto)* ¿Es eficaz el medicamento según este modelo? Razona tu respuesta.
4. *(1 punto)* Según $p_0$, ¿cuántos días son necesarios, como mínimo, para reducir la población a la mitad de la que se tenía en el día 0? Razona tu respuesta.

**Ejercicio 2.** Consideramos la ecuación en diferencias:
$$x_{n+1} = 3x_n + b_n, \tag{1}$$
donde $\{b_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de números reales.

1. *(1 punto)* Encuentra una expresión, lo más simplificada posible, del término general de las soluciones de la ecuación (1).
2. *(1 punto)* Si $b_n = e^{-n}$, demuestra que $\{y_n\}_{n\geq 0}$, con $y_n = \dfrac{e^{-n+1}}{1-3e}$, es una solución de (1).
3. *(1 punto)* Resuelve la ecuación si $b_n = e^{-n}$. ¿Qué ocurre con sus soluciones a largo plazo?

**Ejercicio 3.** Se considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$, donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface

- $f(0) = 0$,
- $f'(x) > 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

1. *(1 punto)* Calcula los puntos de equilibrio del modelo.
2. *(1 punto)* Discute la existencia de 2-ciclos no triviales.
3. *(1 punto)* Si $f(x) = x + e^x - 1$, determina la estabilidad del punto de equilibrio $x = 0$.

**Ejercicio 1.** Un equipo de farmacología trabaja con un modelo matemático propuesto por Ana, la matemática del grupo, para determinar la eficacia de un cierto medicamento frente a una enfermedad bacteriana. Ana les ha dicho que:

- Su modelo se basa en una ecuación en diferencias de la forma $p_{n+1} = f(p_n)$, con $f$ una función lo regular que haga falta. Sin entrar en detalles, porque ella es la única que sabe matemáticas.
- Si la población bacteriana, sujeta a la influencia del medicamento que están estudiando, se rige por este modelo, su tamaño en el día de estudio $n$ viene dado por
$$p_n = \frac{1}{a+bn}, \quad a > 0, b > 0,$$
medido en miles.

1. *(1 punto)* ¿Puede ser el modelo planteado una ecuación lineal de la forma $p_{n+1} = Ap_n + B_n$? Razona tu respuesta.

   Analicemos la naturaleza del modelo:

   - El enunciado especifica que el modelo sigue una ecuación de la forma $p_{n+1} = f(p_n)$. Esto define un modelo autónomo, donde la función de $f$ depende únicamente del valor de la población en el paso anterior ($p_n$) y no de $n$.
   - En una ecuación lineal $p_{n+1} = Ap_n + B_n$, para que el modelo sea autónomo, los coeficientes $A$ y $B_n$ deben ser constantes (es decir, $B_n = B$).

   Veamos si $B_n = B$ cte. Para ello $p_{n+1} = Ap_n + B_n$ debería ser compatible con la solución general dada:
$$p_n = \frac{1}{a+bn}$$
$$\frac{1}{a+b(n+1)} = \frac{A}{a+bn} + Bn \implies B_n = \frac{1}{a+b(n+1)} - \frac{A}{a+bn} = \frac{a+bn-A(a+bn+b)}{(a+bn+b)(a+bn)}$$
   Si $A = 1$ podríamos deshacernos de la $n$ del numerador, sin embargo el valor del denominador seguirá dependiendo de $n$.

   Por tanto, el modelo no puede ser una ecuación lineal autónoma.

2. *(1 punto)* Determina el tamaño de la población en función de su tamaño inicial.
   Sea $p_0$ el tamaño de la población inicial, sabemos que:
$$p_0 = p_{n=0} = \frac{1}{a+b\cdot 0} \implies p_0 = \frac{1}{a} \implies a = \frac{1}{p_0}$$
   De esta manera la ecucación queda:
$$p_n = \frac{1}{\frac{1}{p_0}+bn}$$

3. *(1 punto)* ¿Es eficaz el medicamento según este modelo? Razona tu respuesta.
   El medicamento será eficaz si a largo plazo elimina la población bacteriana, esto es $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. Veamos si es cierto:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{p_0} + bn} = \frac{1}{\infty} = 0$$

   Consecuentemente, el medicamento es eficaz según este modelo.

4. *(1 punto)* Según $p_0$, ¿cuántos días son necesarios, como mínimo, para reducir la población a la mitad de la que se tenía en el día 0? Razona tu respuesta.
   Calculamos $n$ para ${}^{p_0}/_2$:

$$\frac{p_0}{2} = \frac{1}{\frac{1}{p_0} + b \cdot n} \Longrightarrow \left(\frac{1}{p_0} + b \cdot n\right) \cdot \frac{p_0}{2} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{p_0 \cdot b \cdot n}{2} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{p_0 \cdot b \cdot n}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow n = \left\lceil \frac{1}{p_0 \cdot b} \right\rceil$$

   Se necesitarán $\left\lceil \frac{1}{p_0 \cdot b} \right\rceil$ días como mínimo.

**Ejercicio 2.** Consideramos la ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = 3x_n + b_n, \tag{2}$$

donde $\{b_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de números reales.

1. *(1 punto)* Encuentra una expresión, lo más simplificada posible, del término general de las soluciones de la ecuación (2).
   Partiendo de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = 3x_n + b_n$, iteramos los primeros términos para identificar un patrón:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 3x_0 + b_0 \\
&x_2 = 3x_1 + b_1 = 3(3x_0 + b_0) + b_1 = 3^2x_0 + 3b_0 + b_1 \\
&x_3 = 3x_2 + b_2 = 3(3^2x_0 + 3b_0 + b_1) + b_2 = 3^3x_0 + 3^2b_0 + 3b_1 + b_2
\end{aligned}$$

   Observando la estructura de los términos, proponemos como hipótesis del término general:

$$x_n = 3^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-1-i} b_i$$

   Demostraremos la expresión por inducción sobre $n$:

   - Caso base ($n = 1$): Sustituyendo en la fórmula propuesta:

$$x_1 = 3^1 x_0 + \sum_{i=0}^{0} 3^{1-1-i} b_i = 3x_0 + 3^0 b_0 = 3x_0 + b_0$$

     Lo cual coincide con la definición de la relación de recurrencia.

- Paso inductivo: Supongamos que la fórmula es válida para $n$ (Hipótesis de Inducción). Veamos si se cumple para $n+1$:

  $$x_{n+1} = 3x_n + b_n$$

  Aplicando la hipótesis de inducción en $x_n$:

  $$x_{n+1} = 3\left(3^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-1-i} b_i\right) + b_n$$

  Distribuyendo el factor 3:

  $$x_{n+1} = 3^{n+1} x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 3^{n-i} b_i + b_n$$

  Nótese que el término $b_n$ puede reescribirse como $3^{n-n} b_n$ y añadirlo al sumatorio como el término correspondiente a $i = n$:

  $$x_{n+1} = 3^{n+1} x_0 + \sum_{i=0}^{n} 3^{n-i} b_i$$

La fórmula queda demostrada para todo $n \geq 1$.

2. *(1 punto)* Si $b_n = e^{-n}$, demuestra que $\{y_n\}_{n\geq 0}$, con $y_n = \dfrac{e^{-n+1}}{1-3e}$, es una solución de (2).
Para que $y_n$ sea solución, deberá cumplir (2). Entonces, sustituyendo en (2):

$$\frac{e^{-n}}{1-3e} = 3\frac{e^{-n+1}}{1-3e} + e^{-n} \implies \frac{e^{-n}}{1-3e} = \frac{3 \cdot e \cdot e^{-n}}{1-3e} + e^{-n}$$

Dividiendo por $e^{-n}$:

$$\frac{1}{1-3e} = \frac{3e}{1-3e} + 1 = \frac{3e+1-3e}{1-3e} = \frac{1}{1-3e}$$

De esta manera, $y_n = \dfrac{e^{-n+1}}{1-3e}$ es solución de (2).

3. *(1 punto)* Resuelve la ecuación si $b_n = e^{-n}$. ¿Qué ocurre con sus soluciones a largo plazo?

Hemos demostrado en el apartado 2 que $y_n = \dfrac{e^{-n+1}}{1-3e}$ es solución particular de (2) y en el apartado 1 que las soluciones de (2) son de la forma $x_n = 3^n(x_0 - \bar{x}_0) + \bar{x}_n$. Consecuentemente:

$$x_n = 3^n\left(x_0 - \frac{e}{1-3e}\right) + \frac{e^{-n+1}}{1-3e}$$

Ahora, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[3^n\left(x_0 - \frac{e}{1-3e}\right) + \frac{e^{-n+1}}{1-3e}\right]$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-n+1}}{1-3e} = 0$:

- Si $x_0 = \dfrac{e}{1-3e}$, sus soluciones convergen al 0 a largo plazo.
- Si $x_0 \neq \dfrac{e}{1-3e}$, sus soluciones divergen:
  - Si $x_0 > \dfrac{e}{1-3e} \implies L = +\infty$ (divergen a $+\infty$).
  - Si $x_0 < \dfrac{e}{1-3e} \implies L = -\infty$ (divergen a $-\infty$).

**Ejercicio 3.** Se considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$, donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface

- $f(0) = 0$,
- $f'(x) > 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

1. *(1 punto)* Calcula los puntos de equilibrio del modelo.
   Los puntos de equilibrio son las soluciones de la ecuación $f(x) = x$. Por el enunciado, sabemos que $f(0) = 0$, entonces $x = 0$ es un punto de equilibrio.

   Para determinar si existen otros puntos fijos, definimos la función auxiliar $g(x) = f(x) - x$. Es evidente que $g(0) = 0$. Derivando respecto a $x$, obtenemos:

   $$g'(x) = f'(x) - 1$$

   Dado que $f'(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que $g'(x) > 0$. Esto implica que $g(x)$ es una función **estrictamente creciente** en todo su dominio.

   Supongamos ahora que existe otro punto de equilibrio $y \neq 0$, tal que $g(y) = 0$. Analizamos los dos casos posibles:

   - Si $y < 0$, por el crecimiento estricto de $g$, tendríamos $g(y) < g(0)$, lo que implica $0 < 0$, una contradicción.
   - Si $y > 0$, análogamente tendríamos $g(y) > g(0)$, lo que implica $0 > 0$, de nuevo una contradicción.

   Por lo tanto, $g(x)$ se anula únicamente en $x = 0$, lo que demuestra que $\exists!$ punto de equilibrio en el modelo y es $x = 0$.

2. *(1 punto)* Discute la existencia de 2-ciclos no triviales.
   Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un 2-ciclo no trivial $\{x_0, x_1\}$, lo que implica que $f(x_0) = x_1$ y $f(x_1) = x_0$ con $x_0 \neq x_1$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $x_0 < x_1$.

   Dado que el enunciado establece que $f'(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la función $f$ es estrictamente creciente. Aplicando la propiedad de monotonía a nuestra hipótesis:

   $$x_0 < x_1 \implies f(x_0) < f(x_1)$$

   Sustituyendo los valores del ciclo en la desigualdad obtenemos:

   $$x_1 < x_0$$

   Esto representa una contradicción con la suposición inicial $x_0 < x_1$. Por lo tanto, concluimos que no pueden existir 2-ciclos no triviales bajo estas condiciones.

3. *(1 punto)* Si $f(x) = x + e^x - 1$, determina la estabilidad del punto de equilibrio $x = 0$.
En primer lugar, verificamos que $x = 0$ es, en efecto, un punto fijo evaluando la función:
$$f(0) = 0 + e^0 - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$$
Para determinar su estabilidad, calculamos la derivada de la función:
$$f'(x) = 1 + e^x$$
Evaluando en el punto de equilibrio obtenemos $f'(0) = 1 + e^0 = 2$. Nótese que la condición del enunciado se cumple, ya que $f'(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ dado que $e^x > 0$.
Finalmente, aplicando el teorema de la primera derivada, tenemos que:
$$|f'(0)| = 2 > 1$$
entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es inestable.